Лекція № 7

Тема: Поняття поверхні

Література:

1. Атанасян Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян, В.Т, Базылев. Ч.II. – М.: Просвещение, 1987. – 332 с.
2. Синюков Н.С. Топология / Н.С. Синюков, Т.И. Матвиенко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 264 с.

План лекції

1. Векторна функція двох скалярних аргументів.
2. Означення границі та неперервності в точці.
3. Диференціал векторної функції двох аргументів.
4. Найпростіші та елементарні поверхні.
5. Загальне уявлення про поверхню.

Короткий зміст лекції: поняття векторної функції двох скалярних аргументів; означення : нескінченно малої векторної функції, границі векторної функції, неперервність функції, диференційовність в точці;
поняття про частині похідні їх формули; формула диференціала векторної функції; поняття про найпростіші поверхні : елементарну, звичайну, межову;
поняття про край поверхні.

Основні поняття лекції:

Нехай $V-$ тривимірний векторний простір над полем дійсних чисел $R, G-$ *двовимірний проміжок,* тобто одна з множин : $R^2 = R \times R$, або $R_+^2 = \{(u, v)\, \epsilon\, R^2 |\ v \geq 0\}$, або квадрат $\{(u, v)\, \epsilon\, R^2 |\ 0\ \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a\}$, де $a > 0$.

Означення :

1. Якщо за деяким законом кожній точці $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in \mathrm{G}$ поставлений у відповідність вектор $\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in \mathrm{V}$, то кажуть, що на проміжку G задана векторна функція $\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ двох скалярних аргументів u і v.

2. Векторна функція $\vec{r}(u, v)$ називається *нескінченно малою поблизу точки* $(u_0, v_0) \epsilon G$, якщо числова функція $|\vec{r}(u, v)|$ нескінченно мала поблизу цієї точки, тобто якщо $\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)}|\vec{r}(u, v)| = 0$.
3. *Границею векторної функції* $\vec{r}(u, v)$ при $(u, v) \to (u_0, v_0)$ називається такий сталий вектор $\vec{a}$, що $\vec{r}(u, v) \to \vec{a}$ є нескінченно мала поблизу точки (u_0, v_0).
4. *Векторна функція* $\vec{r}(u, v)$ називається неперервною в точці $(u_0, v_0) \epsilon G$, якщо $\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u_0, v_0)$.

Нехай в проміжку G задана векторна функція $\vec{r}(u, v)$; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k}$ – ортонормований базис в V. В кожній точці $(u, v) \epsilon G$ маємо:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\vec{k}.$$

Функції $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ називаються *координатами векторної функції* $\vec{r}(u, v)$ в базисі $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k}$. Нехай $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\vec{r}(u, v) = \vec{a}$, де $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$, тоді, очевидно, при $(u, v) \to (u_0, v_0)$ справедливі рівності :

$$\lim x(u, v) = a_1 , \qquad \lim y(u, v) = a_2 , \quad \lim z(u, v) = a_3.$$

Якщо покласти $v = v_0 = const$, де $(u, v_0) \epsilon G$, то ми отримуємо функцію $\vec{r}(u, v_0)$ однієї змінної. Якщо ця точка в деякій точці u має похідну $\frac{d\vec{r}(u,v_0)}{du}$, то її називають *частинною похідною* по змінній u в точці (u, v_0) і позначають через $\frac{d\vec{r}}{du}$ або $\overrightarrow{r_u}$.

З $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\vec{k}$ випливає, що частинні похідні $\overrightarrow{r_u}$ і $\overrightarrow{r_v}$ існують в точці $(u, v) \epsilon G$ тоді і тільки тоді, коли існують такі частинні похідні :

$$x_u = \frac{dx(u, v)}{du}, \qquad y_u = \frac{dy(u, v)}{du}, \quad z_u = \frac{dz(u, v)}{du},$$

$$x_v = \frac{dx(u, v)}{dv}, \qquad y_v = \frac{dy(u, v)}{dv}, \quad z_v = \frac{dz(u, v)}{dv}.$$

Якщо функції $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ диференційовані в точці $(u, v) \epsilon G$, то вектор $d\vec{r} = dx(u, v)\vec{\imath} + dy(u, v)\vec{\jmath} + dz(u, v)\vec{k}$ називають *диференціалом* векторної функції $\vec{r}(u,v)$ в точці (u,v). Звідси випливає , що

$$d\vec{r} = \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv.$$

Означення :

5. *Векторна функція* $\vec{r}(u,v)$ називається диференційовною в точці (u,v), якщо в цій точці існує диференціал $d\vec{r}$.
6. *Найпростішими поверхнями в просторі* E_3 називаються: площина, замкнена напівпролощина, квадрат.
7. *Елементарною поверхнею* називається фігура, яка гомеомрфна одній з найпростіших поверхонь, тобто якщо вона гомеоморфна деякому числовому проміжку $G \subset R^2$.
8. *Поверхнею* називається така фігура в E_3, яку можна покрити скінченними або зчисленним числом елементарних поверхонь.
9. Точка M поверхні F називається *звичайною,* якщо існує такий її ε −окіл $B(M,\varepsilon)$, що $F \cap B(M,\varepsilon)$ є елементарна поверхня. Якщо цей перетин гомеоморфний площині, то точка M називається *внутрішньою точкою,* якщо напівплощині – *межовою*.

   Якщо точка M не є звичайною, то її називають *особливою точкою*.
10. Поверхня, у якої всі точки звичайні називається *простою.* Множина всіх межових точок поверхні називається *краєм поверхні.*

Лекція № 8

Тема: Гладкі поверхні

Література:

1. Атанасян Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян, В.Т, Базылев. Ч.II. – М.: Просвещение, 1987. – 332 с.

2. Синюков Н.С. Топология / Н.С. Синюков, Т.И. Матвиенко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 264 с.

План лекції

1. Означення гладкої поверхні класу C^k.

2. Криволінійні координати точки на поверхні.
3. Заміна параметризації.
4. Умови, при яких рівняння визначають гладку поверхню.

Короткий зміст лекції: означення гладкої лінії; поняття u −лінії; поняття заміни параметризації; перелік обмежень, які накладаються на функції; означення якобіанового відображення; огляд умов, при яких рівняння визначають гладку поверхню.

Основні поняття лекції:

Нехай $F_0 -$ елементарна поверхня, яка задана параметричними рівняннями:

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

де функції $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ визначені в області G.

Означення:

1. Поверхня F_0 називається *гладкою класу* C^k, якщо праві частини рівняння $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$, $\mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{u}, \mathrm{v}), \mathrm{z} = \mathrm{z}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ мають в області G неперервні частинні похідні до k −го порядку включно, причому в кожній точці $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \epsilon \mathrm{G}$ має місце рівність
$$\text{ранг} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & y_v \end{pmatrix} = 2.$$
2. Проста поверхня F називається *гладкою класу* C^k, якщо в кожній внутрішній точці M існує ε −окіл $\mathrm{B}(\mathrm{M}, \varepsilon)$ такий, що $\mathrm{F} \cap \mathrm{B}(\mathrm{M}, \varepsilon$ – гладка(елементарна) поверхня класу C^{k}.

Нехай $F_0 -$ елементарна поверхня (див.рисунок), $M(u, v) -$ точка на цій поверхні, і нехай $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ −радіус-вектор цієї точки. Якщо $v = v_0 = const$, то кінець вектора $\vec{r}(u, v_0)$ опише гладку лінію, яка називається u −лінією. Вектор $\overrightarrow{r_u}$ є напрямний вектор дотичної до цієї лінії в точці (u, v).

Параметри u, v називають *криволінійними координатами* точки M на поверхні F_0. При цьому кажуть, що лінії u, v утворюють на поверхні *координатну сітку.*

Заміна параметризації. Нехай $F_0 -$ гладка поверхня класу C^k, яка задана параметричними рівняннями $x = x(u, v),\ y = y(u, v), z = z(u, v)$, і $f: G \to F_0$ −гомеоморфізм.

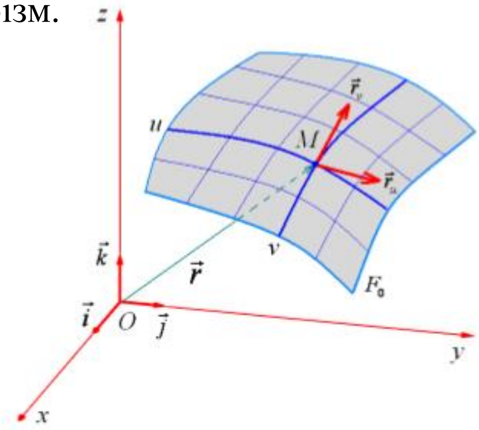

Рис.8.1

Розглянемо гомеоморфізм $h: G \to G'$, де точка $(u, v) \epsilon G$ переходить в точку $(\alpha, \beta) \epsilon G'$:

$$\alpha = \alpha(u, v),\ \ \beta = \beta(u, v).$$

Оскільки $h -$ гомеоморфізм, то рівняння $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$ мають розв'язок відносно u і v:

$$u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta).$$

Тоді з $x = x(u, v),\ y = y(u, v), z = z(u, v)$ маємо :

$$x = f_1(\alpha, \beta), \quad y = f_2(\alpha, \beta), \quad z = f_3(\alpha, \beta),$$

де $f_1(\alpha, \beta) = x\big(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)\big)$, $f_2(\alpha, \beta) = y\big(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)\big), f_3(\alpha, \beta) = z\big(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)\big)$.

Нехай $g: G' \to F_0 -$ відображення, яке задається формулами

$$x = f_1(\alpha, \beta), \quad y = f_2(\alpha, \beta), \quad z = f_3(\alpha, \beta).$$

Маємо з $x = x(u, v),\ y = y(u, v), z = z(u, v)$ і
$x = f_1(\alpha, \beta), y = f_2(\alpha, \beta), \quad z = f_3(\alpha, \beta)$, що $f = g \circ h$, звідси $g = f \circ h^{-1}$, тому $g -$ гомеоморфізм. Кажуть, що функція $\alpha(u, v), \beta(u, v)$ *виконують заміну параметризації.*

Які ж обмеження накладаються на ці функції?

1. $\alpha(u, v), \beta(u, v)$ в області G повинні мати неперервні частинні похідні до k −го порядку включно.

2. В кожній точці $(\alpha, \beta) \epsilon\, G'$ повинна виконуватись рівність

$$\text{ранг} \begin{pmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & y_\beta \end{pmatrix} = 2.$$

Покажемо, що ця рівність рівносильна такій :

$$I(h) = \begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Визначник $I(h)$ називається *якобіаном відображення* $h\colon\ G \to G'$.

Висновок . Якщо гладка поверхня F_0 класу G^k задана рівняннями $x = x(u, v),\ \ y = y(u, v), z = z(u, v)$ в області G, то будемо вважати допустимою тільки таку заміну параметризації $h\colon\ G \to G'$, яка є гомеоморфізмом і виражається формулами $\alpha = \alpha(u, v),\ \ \beta = \beta(u, v)$, де праві частини мають в області G неперервні частинні похідні до порядку k включно, і в цій області якобіан відображення h *відмінний від нуля,* тобто $I(h) \neq 0$.

Коли рівняння $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, де $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{G}$ визначає в просторі гладку поверхню? Це рівняння рівносильне системі таких рівнянь :

$$x = u, \quad y = v, \ \ z = f(u, v).$$

Отже, якщо $f(x, y)$ в області G має неперервні частинні похідні до $k-$го порядку включно, то рівняння $z = f(x, y)$ визначає в просторі гладку поверхню класу G^k.

Коли рівняння $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 0$ визначає гладку поверхню в просторі?

В математичному аналізі доводиться, що коли в точці $M_0(x_0, y_0, z_0) \in\ \Omega$:

1) в деякому околі V_0 цієї точки функції $F(x, y, z)$ та її частинні похідні F_x, F_y, F_z неперервні;
2) в самій точці M_0 $\text{ранг}\left(F_x, F_y, F_z\right) = 1$, то існує окіл $V_0^* \subset\ V_0$ точки M_0 такий, що переріз $\Omega\ \cap V_0^*$ є гладка елементарна поверхня деякого класу $C^k (k \geq 1)$.

Лекція № 9

Тема: Дотична площина і нормаль до поверхні

Література:

1. Атанасян Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян, В.Т, Базылев. Ч.ІІ. – М.: Просвещение, 1987. – 332 с.
2. Синюков Н.С. Топология / Н.С. Синюков, Т.И. Матвиенко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 264 с.

План лекції

1. Теорема про дотичні до лінії на поверхні.
2. Означення дотичної площини і нормалі до поверхні та їх рівняння.

Короткий зміст лекції: виведення рівняння яке визначає гладку лінію класу C^k; теорема про дотичні до лінії на поверхні; означення дотичної до поверхні, нормалі; загальний вигляд рівняння дотичної та нормалі; лема про ненульовий вектор, який перпендикулярний до дотичної.

Основні поняття лекції:

Нехай гладка поверхня F класу C^k задана в області $C \subset R^2$ векторним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v).$$

Покладемо $u = u(t), v = v(t)$, де t пробігає проміжок $I \subset \mathrm{R}$ такий, що $\big(u(t), v(t)\big) \epsilon\, G$ при довільному $t \,\epsilon\, I$. Нехай функції $u(t), v(t)$ мають неперервні похідні до k –го порядку включно і похідні $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ не обертаються в нуль одночасно в жодній точці з I. Підставимо рівності $u = u(t), v = v(t)$ в $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$:

$$\vec{r} = \vec{r}\big(u(t), v(t)\big).$$

Ми отримали векторну функцію одного скалярного аргументу $\vec{r} = \vec{r}^*(t)$, де $\vec{r}^*(t) = \vec{r}\big(u(t), v(t)\big)$. Рівняння $\vec{r} = \vec{r}^*(t)$ визначає гладку лінію класу C^k, яка лежить на поверхні F. Навпаки, кожна гладка лінія класу C^k, яка лежить на поверхні F, може бути задана рівняннями $u = u(t), v = v(t)$, на які накладаються умови, сформовані вище.

Нехай M_0 — деяка точка поверхні F класу C^k, яка задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Відомо, що вектори $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ лінійно незалежні. Розглянемо площину $(M_0, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$, яка проходить через точку M_0 паралельно векторам $\vec{r}_u, \vec{r}_v$.

Теорема:

Нехай $\mathrm{M}_0(\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0)$ — точка гладкої поверхні F класу C^{k}, яка задана рівнянням $\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$. Тоді множина дотичних в точці M_0 до всіх гладких ліній, які лежать на поверхні F і проходить через цю точку, утворює пучок прямих площини $(\mathrm{M}_0, \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{v}})$ з центром M_0.

Означення:

1. Площина, в якій лежать дотичні до всіх ліній, які лежать на поверхні F і проходять через точку M_0, називають *дотичною площиною до поверхні F в точці M_0*.

Вектори $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ утворюють базис *дотичного векторного підпростору* T_{M_0} в точці M_0. Якщо ж перейти до іншої параметризації α, β, то вектори $\overrightarrow{r_\alpha} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha}, \overrightarrow{r_\beta} = \frac{d\vec{r}}{d\beta}$ лінійно незалежні, а тому $\overrightarrow{r_\alpha}, \overrightarrow{r_\beta}$ є інший базис підпростору T_{M_0}.

2. *Нормаллю до гладкої поверхні F в точці* $M_0 \epsilon F$ називається пряма, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини.

Очевидно, що вектор $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ є напрямним вектором нормалі. Отже, пряма $(M_0, \vec{N})$ — нормаль, до F в точці M_0. Якщо в системі координат $O_{\vec{i}\vec{j}\vec{k}}$ вектор $\vec{N}$ має координати $\vec{N}(N_1, N_2, N_3)$, то дотична площина має рівняння

$$N_1(x - x_0) + N_2(y - y_0) + N_3(z - z_0) = 0,$$

а нормаль має рівняння

$$\frac{x - x_0}{N_1} = \frac{y - y_0}{N_2} = \frac{z - z_0}{N_3},$$

де точка дотикання M_0 має координати $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Лема:

Якщо гладка поверхня задана в неявному виді рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то вектор $\vec{N}(F_x, F_y, F_z)$ є ненульовий вектор, який перпендикулярний до дотичної площини даної поверхні у відповідній точці.

Практичне заняття № 8 з теми
«Дотична площина та нормаль до поверхні»

Аудиторні завдання :

1. На поверхні $x = u + \cos v$, $y = u - \sin v$, $z = \lambda u$ дана точка $M(u = 1, v = \frac{\pi}{2})$:

   а) написати рівняння дотичних прямих та нормальних площин до ліній $u = 1, v = \frac{\pi}{2}$ в точці M;

   б) знайти кут між лініями $u = 1, v = \frac{\pi}{2}$;

   в) показати, що дотична в точці M до лінії $u = \sin v$ є дотичною до лінії $u = 1$ в тій самій точці.

2. Написати рівняння дотичної поверхні та нормалі до поверхні
   $x = u + v, y = u - v, z = uv$ в точці $M(u = 2, v = 1)$.
3. Написати рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M(1,3,4)$ поверхні $x = u, y = u^2 - 2v, z = u^3 - 3uv$.
4. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до наступної поверхні у вказаних точках:
   1. $z = x^3 + y^3$ в точці $M(1,2,9)$;
   2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точці $M(x_0, y_0, z_0)$.
5. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до прямого гелікоїду $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$. Дослідити поведінку нормалі при зміщенні її уздовж координатних ліній.
6. Написати рівняння дотичної площини к тору
   $x = (1 + 5 \cos u) \cos v$, $y = (1 + 5 \cos u) \sin v$, $z = 5 \sin u$ в точці $M(u, v)$ для якої $\cos u = \frac{3}{5}$, $\cos v = \frac{4}{5}$ $\left(0 < u, v < \frac{\pi}{2}\right)$.

Для самостійного розв'язання :

1. Показати, що нормаль в довільній точці поверхні утвореною дотичними до гвинтової лінії, утворює постійний кут з віссю лінії.
2. Написати рівняння дотичної площини до поверхні

   $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$ в точці $M(3,5,7)$.
3. Дано поверхню $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u.$ В її точці $M(u = 2, v = \frac{\pi}{4})$ написати рівняння дотичної площини, нормалі до поверхні та дотичної до лінії $u = 2$.
4. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до наступної поверхні у вказаних точках:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точці $M(3,4,12)$;
2. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точці $M(3,1,-1)$;

5. Написати рівняння дотичної площини до псевдосфери

   $x = a\sin u\cos v\,,\ \ y = a\sin u\sin v\,,\ \ z = a(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u)$.
6. До поверхні $xyz = 1$ провести дотичну площину, паралельну площині $x + y + z - 3 = 0$.